ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 124 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-637-642
УДК 517

ОБ УРАВНЕНИЯХ, ПОРОЖДЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫМИ НИЛЬПОТЕНТНЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ

© **З. Т. Жуковская, С. Е. Жуковский**

Российский университет дружбы народов
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. М.-Маклая, 6
E-mail: zyxra2@yandex.ru, s-e-zhuk@yandex.ru

Аннотация. Предложено обобщение понятия нильпотентности для нелинейных отображений, действующих из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$. Исследованы свойства нелинейных нильпотентых отображений. Получены критерии нильпотентности для дифференцируемых и однородных полиномиальных отображений.

Ключевые слова: нелинейное нильпотентное отображение; полиномиальное однородное отображение

Введение

В этой работе исследуются отображения вещественных конечномерных пространств, обладающие свойством, сходным со свойством нильпотентности для линейных операторов. Напомним, что линейный оператор $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ называется нильпотентным, если существует $k\in\mathbb{N}$ такой, что $A^k=0$. Нильпотентный линейный оператор A обладает следующими свойствами: $A^n=0$ (здесь n – размерность пространства, в котором действует линейный оператор); линейный оператор $I-A$ обратим и $(I-A)^{-1}=I+A+A^2+...+A^{n-1}$ (здесь $I:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ – тождественное отображение); спектральный радиус $\sigma(A)$ линейного оператора A равен нулю; все элементы главной диагонали жордановой формы матрицы линейного оператора A являются нулями. Подробнее свойства нильпотентных линейных операторов приведены, например, в [1, гл. 3].

Цель настоящей работы – изучить нелинейные отображения, обладающие свойством, сходным со свойство нильпотентности линейных операторов. При этом мы ограничимся рассмотрением отображений, действующих из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации (проект № МК-2085.2017.1) и гранта РФФИ (проект № 16-01-00677). Результаты §2 получены вторым автором при поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01168).

1. Нильпотентные отображения

Пусть задано отображение $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такое, что $f(0) = 0$. Будем называть отображение f нильпотентным, если

$$f(f(x) + y) = f(y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

Отметим, что линейное отображение $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ нильпотентно в смысле этого определения тогда и только тогда, когда $A^2 = 0$. Примером нелинейного нильпотентного отображения является отображение

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma(x_1) \end{pmatrix}, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

где γ – произвольная функция. Ниже мы покажем, что любое гладкое нильпотентное отображение представимо в таком виде.

Понятие нильпотентности играет важную роль при исследовании вопроса разрешимости линейных уравнений. Покажем, что введенное обобщение понятия нильпотентности применимо к нелинейным уравнениям.

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть отображение $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ нильпотентно. Тогда при любом $y \in \mathbb{R}^2$ уравнение*

$$x - f(x) = y$$

с неизвестным x имеет единственное решение. В частности, нуль является единственной неподвижной точкой отображения f.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $y \in \mathbb{R}^2$. Положим $F(x) := y + f(x)$. В силу (1) имеем

$$F^2(x) = y + f(y + f(x)) = y \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^2.$$

Значит, F^2 является сжимающим отображением. Следовательно (см. [2, гл. I, §1.6]), F имеет единственную неподвижную точку $\widehat{x}$. Таким образом, $x = \widehat{x}$ – единственное решение уравнения $x - f(x) = y$. При $y = 0$ это решение является неподвижной точкой отображения f. □

Как отмечалось выше, если $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ – линейный нильпотентный ненулевой оператор, то оператор $I - f$ обратим, и имеет место равенство

$$(I - f)^{-1} = I + f. \tag{2}$$

Покажем, что этим свойством обладают и нелинейные нильпотентные отображения.

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть отображение $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ нильпотентно. Тогда отображение $I - f$ обратимо и имеет место равенство (2).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предложения 1 отображение $I - f$ взаимнооднозначно. Кроме того, $(I - f)(y + f(y)) \equiv y + f(y) - f(y + f(y)) \equiv y + f(y) - f(y) \equiv y$. Значит, имеет место равенство (2). □

2. Нильпотентные дифференцируемые отображения

Приведем критерий нильпотентности для дифференцируемых отображений.

П р е д л о ж е н и е 3. *Пусть* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *– дифференцируемое отображение такое, что* $f(0) = 0$. *Оно нильпотентно тогда и только тогда, когда*

$$f'(u)f'(v) = 0 \quad \forall\, u, v \in \mathbb{R}^2. \tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено (3). Зафиксируем $y \in \mathbb{R}^2$. Положим $F(x) := f(f(x) + y)$. Имеем $F'(x) = f'(f(x) + y)f'(x) = 0$ для любого $x \in \mathbb{R}^2$ в силу (3). Следовательно, $F(x) = \mathrm{const}$. Значит, $f(f(x)+y)$ зависит от y и не зависит от x. Поэтому $f(f(x) + y) = f(f(0) + y) = f(y)$ для любого $x \in \mathbb{R}^2$.

Пусть выполнено предположение (1). Возьмем произвольные $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$. Положим $F(x) := f(u - f(v) + f(x))$. В силу (1) имеем $F'(v) = 0$. Отсюда, поскольку $F'(x) = f'(u - f(v) + f(x))f'(x)$, при $x = v$ получаем $f'(u)f'(v) = 0$. $\square$

Как отмечалось выше, линейный нильпотентный ненулевой оператор $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в некотором базисе принимает вид

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

Покажем, что аналогичное свойство имеет место и для нелинейных нильпотентных отображений.

Теорема 1. *Если отображение* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *дифференцируемо и нильпотентно, то существует дифференцируемая функция* $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *и базис в* $\mathbb{R}^2$, *в котором* f *принимает вид*

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma(x_1) \end{pmatrix} \quad \forall\, x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $f(x) \equiv 0$, то утверждение теоремы очевидно. Поэтому далее будем предполагать, что $f(x) \not\equiv 0$.

Возьмем произвольную точку $\widehat{x} \in \mathbb{R}^2$ такую, что $f'(\widehat{x}) \neq 0$ (такая точка существует, поскольку $f(x) \not\equiv 0$ и $f(0) = 0$). В силу (4) имеем $f'(\widehat{x})f'(\widehat{x}) = 0$. Следовательно, существует базис, в котором матрица линейного оператора $f'(\widehat{x})$ принимает вид

$$f'(\widehat{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть в этом базисе f имеет вид

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^2.$$

Здесь $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – некоторые дифференцируемые функции. Тогда в силу (4) имеем

$$0 = f'(\widehat{x})f'(x) = \begin{pmatrix} \theta \\ f_1'(x) \end{pmatrix} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^2.$$

Здесь $\theta = (0, 0)$, а $f_1'(x)$ – градиент функции f_1. Отсюда, поскольку $f(0) = 0$, то $f_1(x) \equiv 0$. Обозначим $g(x) := f_2(x)$. Имеем

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^2.$$

Отсюда и из тождества $f'(x)f'(x) \equiv 0$ следует, что

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g'_{x_1}(x) & g'_{x_2}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g'_{x_1}(x) & g'_{x_2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g'_{x_1}(x) g'_{x_2}(x) & g^2_{x_2}(x) \end{pmatrix}$$

для каждого $x \in \mathbb{R}^2$. Здесь $(g'_{x_1}(x), g'_{x_2}(x)) = g'(x)$. Значит, $g'_{x_2}(x) = 0$ для каждого $x \in \mathbb{R}^2$. Следовательно, существует дифференцируемая функция $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что $g(x) \equiv \gamma(x_1)$. Таким образом, имеет место представление (4). □

2. Нильпотентные полиномиальные отображения

Исследуем теперь свойства нильпотентных полиномиальных отображений. Напомним, что отображение $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ называется однородным полиномиальным отображением степени $k \in \mathbb{N}$, если существует ненулевое отображение

$$p : \underbrace{\mathbb{R}^2 \times .... \times \mathbb{R}^2}_{k \text{ шт.}} \to \mathbb{R}^2,$$

которое линейно по каждому аргументу, и $f(x) \equiv p[x, ..., x]$.

Теорема 2. *Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ – однородное полиномиальное отображение степени $k \in \mathbb{N}$. Предположим, что*

$$f'(x)f'(x) \equiv 0. \tag{5}$$

Тогда существует число $\alpha \neq 0$ и базис в $\mathbb{R}^2$, в котором

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha x_1^k \end{pmatrix} \quad \forall\, x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $k = 1$, то отображение f линейно. В этом случае из (5) следует, что существует базис, в котором матрица линейного оператора $f'(x)$ принимает вид

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^2,$$

и, значит, f имеет вид (6). Поэтому всюду далее будем полагать, что $k \geq 2$.

Зафиксируем произвольный базис в $\mathbb{R}^2$. Пусть в некотором базисе отображение f имеет вид

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} \quad \forall\, x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Здесь $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – некоторые однородные многочлены, причем либо оба многочлена имеют степень k, либо один из них имеет степень k, а второй тождественно равен нулю. Для определенности далее будем полагать, что $f_1 \neq 0$.

Положим $g_1(t) := f_1(t, 1)$, $g_2(t) := f_2(t, 1)$, $t \in \mathbb{R}$. В силу однородности многочленов f_1 и f_2 имеют место равенства

$$f_1(x) = x_2^k g_1(x_1/x_2), \quad f_2(x) = x_2^k g_2(x_1/x_2) \quad \forall\, x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \quad x_2 \neq 0.$$

Следовательно,

$$f'(x) = \begin{pmatrix} x_2^{k-1}g_1'(x_1/x_2) & kx_2^{k-1}g_1(x_1/x_2) - x_1x_2^{k-2}g_1'(x_1/x_2) \\ x_2^{k-1}g_2'(x_1/x_2) & kx_2^{k-1}g_2(x_1/x_2) - x_1x_2^{k-2}g_2'(x_1/x_2) \end{pmatrix},$$

и, значит,

$$\det(f'(x)) = kx_2^{2k-2}\big(g_1'(x_1/x_2)g_2(x_1/x_2) - g_1(x_1/x_2)g_2'(x_1/x_2)\big), \tag{7}$$

$$\mathrm{tr}(f'(x)) = x_2^{k-1}g_1'(x_1/x_2) + kx_2^{k-1}g_2(x_1/x_2) - x_1x_2^{k-2}g_2'(x_1/x_2) \tag{8}$$

для $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ таких, что $x_2 \neq 0$. Здесь $\det(f'(x))$ – определитель матрицы $f'(x)$, а $\mathrm{tr}(f'(x))$ – ее след.

В силу предположения (5) имеем $\det(f'(x)) \equiv 0$. Поэтому из соотношения (7) следует, что

$$g_1'(t)g_2(t) - g_1(t)g_2'(t) = 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Отсюда, поскольку $f_1 \neq 0$, получаем, что существует $c \in \mathbb{R}$ такое, что $g_2(t) \equiv cg_1(t)$. В силу предположения (5) имеем $\mathrm{tr}(f'(x)) \equiv 0$. Поэтому из соотношений (8) и $g_2(t) \equiv cg_1(t)$ следует, что

$$g_1'(t) + kcg_1(t) - ctg_1'(t) = 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Значит, существует $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, такое, что $g_1(t) \equiv \alpha(1 - ct)^k$. Отсюда и из соотношения $g_2(t) \equiv cg_1(t)$ следует, что

$$f(x) = \alpha \begin{pmatrix} (x_2 - cx_1)^k \\ c(x_2 - cx_1)^k \end{pmatrix} \quad \forall\, x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Возьмем базис $e_1 = (0, 1)$, $e_2 = (1, c)$. Очевидно, что в этом базисе отображение f принимает вид (6). □

Из доказанного следует, для полиномиальных однородных отображений свойства (1), (3) и (5) эквивалентны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
2. *Granas A., Dugundji J.* Fixed Point Theory. N. Y.: Springer-Verlag, 2003. 690 p.

Поступила в редакцию 19 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 22 мая 2018 г.
Принята в печать 26 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Жуковская Зухра Тагировна, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: zyxra2@yandex.ru

Жуковский Сергей Евгеньевич, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Для цитирования: *Жуковская З.Т., Жуковский С.Е.* Об уравнениях, порожденных нелинейными нильпотентными отображениями // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 124. С. 637–642. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-637-642

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-637-642

ON EQUATIONS GENERATED BY NONLINEAR NILPOTENT MAPPINGS

Z. T. Zhukovskaya, S. E. Zhukovskiy

RUDN University
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russian Federation
E-mail: zyxra2@yandex.ru, s-e-zhuk@yandex.ru

Abstract. A generalization of a nilpotent linear operator concept is proposed for nonlinear mapping acting from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^2$. The properties of nonlinear nilpotent mappings are investigated. Criterions of nilpotence for differentiable and polynomial mappings are obtained.

Keywords: nonlinear nilpotent mapping; polynomial homogeneous mapping

REFERENCES

1. Horn R., Johnson C. *Matrix Analysis.* Cambridge, Cambridge University Press, 2013, 643 p.
2. Granas A., Dugundji J. *Fixed Point Theory.* New York, Springer-Verlag, 2003, 690 p.

Received 19 April 2018
Reviewed 22 May 2018
Accepted for press 26 June 2018
There is no conflict of interests.

Zhukovskaya Zukhra Tagirovna, RUDN University, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Assistant of the Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: zyxra2@yandex.ru

Zhukovskiy Sergey Evgenyevich, RUDN University, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

For citation: Zhukovskaya Z.T., Zhukovskiy S.E. Ob uravneniyah, porozhdennih nelineynimi nilpotentnimi operatorami [On Equations Generated by Nonlinear Nilpotent Mappings]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 637–642. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-637-642 (In Russian, Abstr. in Engl.).

The work was supported by the grant of the President of Russian Federation (Project No. MK-2085.2017.1). The results of Section 1 are due to the first author who was supported by the Russian Science Foundation (Project No. 17-11-01168).